

Elementarna matematika 2

Zadaci s vježbi

Sedmi tjedan

Zadatak 1. Odredite omjer površine trokuta ABC i trokuta razapetog njegovim težišnicama.

Zadatak 2. Točka S nalazi se unutar trokuta ABC . Neka su P_a, P_b, P_c redom površine trokuta SBC, SCA, SAB . Dokažite da vrijedi

$$P_a \cdot \overrightarrow{SA} + P_b \cdot \overrightarrow{SB} + P_c \cdot \overrightarrow{SC} = 0.$$

Zadatak 3. Neka su \vec{a}_1 i \vec{a}_2 nekolinearni vektori u prostoru. Ako za vektore \vec{b} i \vec{c} vrijedi $\vec{a}_1 \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{c}$ i $\vec{a}_2 \times \vec{b} = \vec{a}_2 \times \vec{c}$, dokažite da je $\vec{b} = \vec{c}$.

Zadatak 4. Dani su vektori $\vec{v} = (-2, 2, 1)$ i $\vec{w} = (2, 1, 0)$. Odredite

$$\vec{v} \times (\vec{v} \times (\dots (\vec{v} \times \vec{w}) \dots)),$$

gdje se u gornjem izrazu znak \times pojavljuje 2024 puta.

Zadatak 5. Dokažite da plošne dijagonale paralelepipeda koje izlaze iz jednog vrha razapinju paralelepiped dvostruko većeg volumena.

Zadatak 6. Odredite volumen tetraedra $ABCD$, ako znate da vektori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}$ u nekoj ortonormiranoj bazi redom imaju prikaz $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 4, 9)$.

Zadatak 7. Zadani su vektori $\vec{a} = (1, 1, 2), \vec{b} = (1, 2, 1), \vec{c} = (2, 1, 1)$. Za $x, y \geq 0$ za koje je $x + y = 1$, označimo s $V(x, y)$ volumen paralelepipeda razapetog vektorima $x\vec{a} + y\vec{b}, x\vec{b} + y\vec{c}, x\vec{c} + y\vec{a}$. Odredite najveću i najmanju vrijednost koju može poprimiti $V(x, y)$.